ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

**CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ECOLES SUPERIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE**

SESSION 1993

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Nota : Respecter strictement la numérotation des problèmes, des parties et des questions.
Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLEME 1

A. $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ désigne un repère orthonormal de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$.

$a \in \mathbb{R}_+^*$, a est donné ; $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

On note $C(\lambda)$ la courbe admettant pour représentation paramétrique dans le repère R :

$$x(t) = \frac{-2\lambda}{t(3+t^2)} + \frac{6a}{3+t^2}, \quad y(t) = \lambda \frac{1-t^2}{t^2(3+t^2)} + \frac{4at}{3+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}^*,$$

t étant le paramètre de description de $C(\lambda)$ si on fixe λ.

1) Par quelle transformation géométrique passe-t-on de $C(\lambda)$ à $C(-\lambda)$?

2) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$.

Montrer que les points des $C(\lambda)$, quand λ décrit $\mathbb{R}^*$, où $y'(t) = 0$ et $x'(t) \neq 0$, sont situés sur deux droites dont on donnera des équations en fonction de a.

3) a) Montrer que les points stationnaires des $C(\lambda)$, quand λ décrit $\mathbb{R}^*$, sont situés sur un cercle dont on donnera une équation en fonction de a.

b) Etudier avec précision le nombre de tels points sur chaque $C(\lambda)$.

4) Pour chaque $C(\lambda)$ déterminer une droite tangente à cette $C(\lambda)$ en deux points $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$, avec $t_1 \neq t_2$.

On donnera une équation de cette droite en fonction de λ et de a.

5) On prend $\lambda = a$.

a) Donner la représentation paramétrique de C(a).

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $x'(t) = 0$ puis $y'(t) = 0$.

b) Donner le tableau de variation de x et y en fonction de t ; préciser les limites et les valeurs aux points particuliers.

c) Etudier les branches infinies de C(a). Donner une équation de la droite Δ_a trouvée au A 4) en fonction de a.

d) Tracer, dans le repère R, les droites et le cercle obtenus au A 2) ou au A 3) a) ; tracer Δ_a et C(a) (après avoir précisé la nature du point stationnaire de C(a)) dans R.

B. $a \in \mathbb{R}_+^*$, a est donné ; $R_1 = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$.

On considère la surface (S) dont une représentation paramétrique est :

$$x = \frac{-2z}{t(3+t^2)} + \frac{6a}{3+t^2},\quad y = \frac{1-t^2}{t^2(3+t^2)}z + \frac{4at}{3+t^2},\quad t \in \mathbb{R}^*.$$

1) Montrer que (S) contient une famille de droites (G). Etudier la section de (S) par le plan d'équation $z = 0$.

2) $\lambda \in \mathbb{R}^*$; les sections de (S) par les plans d'équation $z = \lambda$, quand λ décrit $\mathbb{R}^*$, sont les $C(\lambda)$ définies dans le A. Trouver une représentation paramétrique de la courbe (Γ) qui contient les points stationnaires des $C(\lambda)$, quand λ décrit $\mathbb{R}^*$.

Etudier et tracer les projections orthogonales de (Γ)

a) sur le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$;

b) sur le plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

3) Trouver une équation du plan osculateur à (Γ) au point M(t), pour $t \neq 0$.

4) Ce plan osculateur coupe le plan $O, \vec{i}, \vec{j}$ suivant une droite D_t. Déterminer l'enveloppe de la droite D_t quand $t \in \mathbb{R}^*$.

PROBLEME 2

Dans ce problème, f désigne une application continue de [0,1] dans $\mathbb{R}$.

$\forall x \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction polynôme f_n par :

(1) $$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

où $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

A. 1) Déterminer la fonction f_n dans les cas suivants :

a) $f(x) = 1$;

b) $f(x) = x$.

2) a) Soit $g : x \longmapsto xf(x)$, définie sur [0,1] ; f_n et g_n sont les fonctions associées respectivement à f et g par la relation (1) ; f'_n est la dérivée de f_n.

Vérifier que :

(2) $\forall x \in [0,1]$, $\frac{x(1-x)}{n} f'_n(x) = g_n(x) - xf_n(x)$.

b) Déterminer f_n si $f(x) = x^2$.

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur [0,1].

3) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$$

B. Dans cette partie, $f(x) = \exp x = e^x$

1) a) Vérifier que $f_n(x) = [x(e^{\frac{1}{n}} - 1) + 1]^n$.

b) $\forall x \in [0,1]$, trouver $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$.

2) Si $x \neq 0$, donner un équivalent, quand $n \to +\infty$, de $f_n(x) - f(x)$.

3) $\forall x \in [0,1]$, soit φ_n la fonction définie par

$$\varphi_n(x) = n \ln [x(e^{\frac{1}{n}} - 1) + 1] - x.$$

a) Montrer que sa dérivée φ'_n possède, dans $]0,1[$, une racine et une seule x_n ; calculer x_n en fonction de n.

b) Donner le tableau de variation de φ_n sur [0,1].

c) Montrer que $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq e\,[\exp[\varphi_n(x_n)] - 1]$ et conclure.